Комнатный Д.В., к. т. н.
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБЪЕМОВ ТЕЛ

(материалы для факультативных и самостоятельных занятий по стереометрии)

Одной из основных тем курса стереометрии является нахождение объемов простых тел. Как правило, в учебниках геометрии формулы для расчета объемов тел получают, применяя определенные интегралы [1]. Но имеются руководства, в которых на основе определенного интеграла доказывается универсальная формула для объемов большой группы тел. Причем в состав этой группы входят все тела, традиционно изучаемые в школьном курсе [2]. Кроме того, в этих же руководствах показывается вычисление объемов тел на основе принципа Кавальери. Возникает совершенно справедливый вопрос: почему же предложено столько различных методов? Второй вопрос, которым частенько задаются школьники: а зачем столько учить? Ведь результаты получаются одинаковые.

Чтобы разобраться в этих вопросах, нужно рассмотреть методы расчета объемов тел в их историческом развитии. Первые решения задач о нахождении объемов простых геометрических тел были даны математиками Античной Греции. Разумеется, в античности не существовало понятия интеграла. Объемы, площади, длины фигур вычислялись методом исчерпывания, который создали великие математики древности Евдокс и Архимед [3]. Понятие об этом методе можно получить, ознакомившись с приемом вывода формулы объема пирамиды под названием «чертова лестница» [4]. Он основан на том, что внутри двух треугольных пирамид размещается ряд призм, образующих ступенчатое тело объемом меньшее объема пирамиды. Затем для одной пирамиды строится ряд призм, образующих ступенчатое тело, объем которого больше объема треугольной пирамиды. Затем доказывается, что при неограниченном увеличении числа призм, объемы ступенчатых тел приближаются к объему пирамид сколь угодно близко. Затем – что пирамиды равновелики. И, наконец, доказывается теорема об объеме пирамиды. Полное изложение всех рассуждений занимает четыре страницы с чертежами.

Поэтому с началом Нового времени в Европе математики стали искать более компактные методы нахождения объемов тел. В частности Бонавентура Кавальери (1598 – 1647) произвел развитие результатов античных авторов на основе понятия «неделимых непрерывного». Так неделимыми плоской фигуры являются отрезки, неделимыми объемной фигуры – плоские сечения. В книге седьмой «Геометрии, изложенной при помощи неделимых непрерывного» Кавальери высказал свой известный принцип: если в сечении двух тел плоскостью, параллельной данной образуются равновеликие плоские фигуры, то и тела равновелики [3, 5]. Этот принцип стал основой общего метода решения различных задач на отыскание объемов тел.

В качестве примера рассмотрим задачу, поставленную математиками XVI века и решенную Б. Кавальери [3].

Найти объем чаши, то есть тела, образованного между параллелепипедом и вписанной в него полусферой радиуса R (рисунок 1).

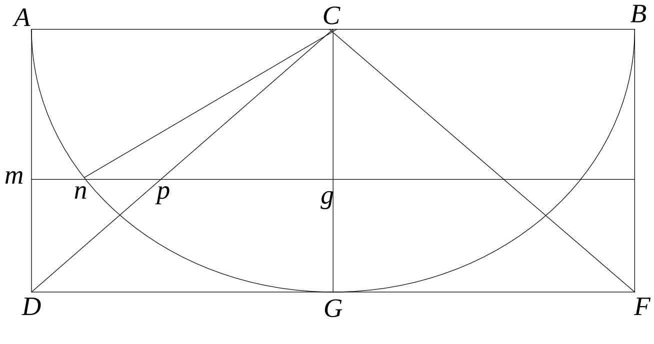

Рисунок 1. – Вычисление объема чаши по принципу Кавальери

Для решения задачи рассмотрим конус $DCGF$. На высоте $gG=x$ проведем плоскость, параллельную плоскости DGF. Тогда $gm=AC=R$.

Длина отрезка $gn = \sqrt{Cn^2 - Cg^2} = \sqrt{R^2 - (R - x)^2}$

Площадь сечения, заключенного между гранью параллелепипеда и поверхностью сферы, есть разность площадей окружностей с радиусами gn и gm

$$S_{mn} = S_{gm} - S_{gn} = \pi R^2 - \pi\left(R^2 - (R-x)^2\right) = \pi (R-x)^2.$$

Для того, чтобы найти площадь сечения конуса gp воспользуемся известным соотношением $\dfrac{S_{gp}}{S_{DG}} = \dfrac{(R-x)^2}{R^2}$. Из него следует, что $S_{gp} = S_{DG}\dfrac{(R-x)^2}{R^2} = \pi R^2 \dfrac{(R-x)^2}{R^2} = \pi (R-x)^2$.

Видно, что площади сечения чаши и конуса равны. По принципу Кавальери объем чаши равен объему конуса $V = \dfrac{1}{3}\pi R^3$.

Но метод Кавальери имел существенную трудность: подбор тела сравнения с известным заранее объемом. Кроме того, Б. Кавальери не мог обосновать свой метод с той же логической строгостью, с какой был обоснован античный метод исчерпывания. Поэтому математики Европы продолжали разработку идеи Кавальери, которая показывает полезность при вычислении объема тела рассматривать сечения этого тела плоскостями, параллельными определенной плоскости [3, 5].

Это направление развития методов вычисления объемов, как это ни удивительно, зародилось одновременно в Японии и в Англии XVII века [5, 6]. В обеих странах совершенно независимо были высказаны идеи, позволявшие прийти к универсальной формуле, о которой шла речь во введении. Причем в японской школе Секи Такакадзу (1640 – 1768) эти идеи были разработаны только для частного случая шара и его частей. В Англии же последователь Ньютона Томас Симпсон (1710 – 1760) вывел формулу общую. (Надо сказать, что основы метода неделимых были известны и в Японии, где были созданы независимо. Но в трудах японских математиков метод неделимых не получил такого же применения, как в работах математиков Европы.)

В обеих школах расчетные соотношения получены путем нестрогих операций с малыми объемами, на которые рассматриваемое тело разделялось плоскостями, параллельными основанию тела [5, 6]. Рассмотрим вывод универсальной формулы, которая называется также формулой Симпсона или формулой Ньютона-Симпсона [5]. Тело разбивается на тонкие слой плоскостями, параллельными плоскости основания. Предполагается, что площадь сечения тела зависит от расстояния от этого сечения до основания тела x по закону $S(x) = A + Bx + Cx^2$ (рисунок 2).

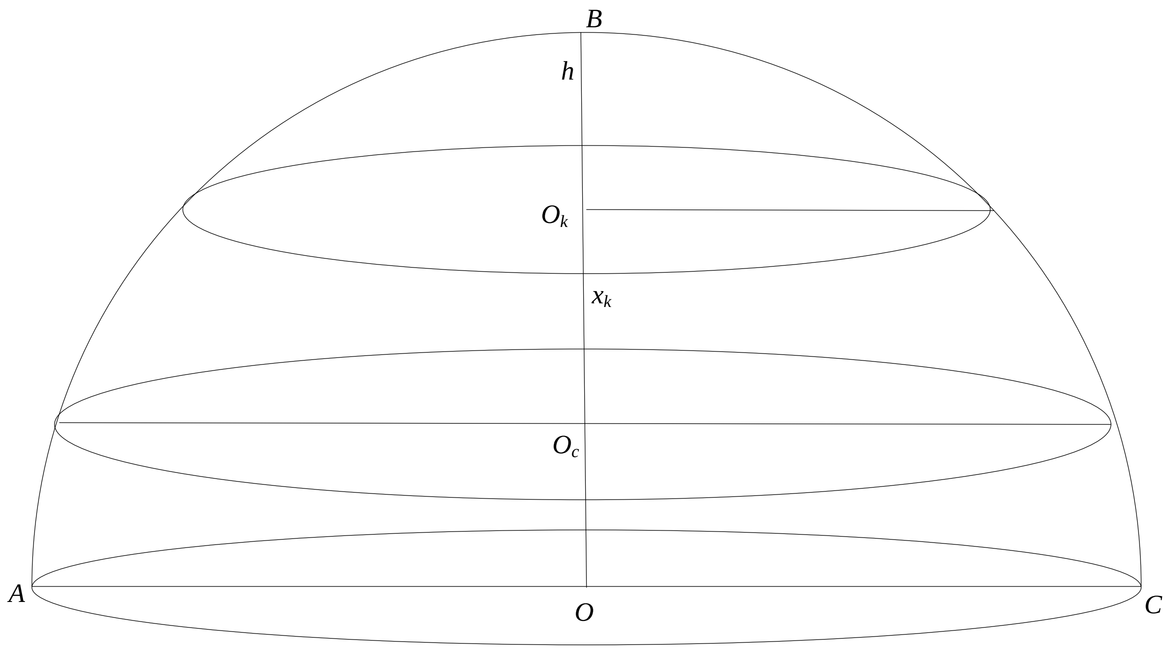

Рисунок 2 – Вывод универсальной формулы Симпсона

Если всех сечений n, то

$$x = k\frac{h}{n};\ k = (0, 1, \ldots n-1),$$

где k – счетная переменная, h – высота тела.

Объем слоя $V_k = S(k)\frac{h}{n}$, тогда объем всего тела приближенно равен сумме объемов отдельных слоев

$$V \approx \frac{h}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(A + Bk\frac{h}{n} + Ck^2\frac{h^2}{n^2}\right).$$

После раскрытия скобок

$$V \approx Ah + B\frac{h^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k + C\frac{h^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 .$$

Для вычисления сумм целых чисел и их квадратов известны формулы, с выводом которых можно познакомиться в [7] и [8]. Их применение дает

$$V \approx Ah + B\frac{h^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} + C\frac{h^3}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

После преобразований

$$V \approx Ah + B\frac{h^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + C\frac{h^3}{6}\left(2 - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Устремляя n к бесконечности, получаем, что объем тела равен

$$V = Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{3}.$$

Чтобы найти коэффициенты A, B, C удобно взять три значения площади сечения: $S(0)=S_1$, $S(h/2)=S_3$, $S(h)=S_2$. Тогда имеем систему уравнений для неизвестных коэффициентов

$$S_1 = A,$$
$$S_2 = A + Bh + Ch^2,$$
$$S_3 = A + B\frac{h}{2} + C\frac{h^2}{2}.$$

После решения этой системы окончательно формула Симпсона имеет вид

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S_3).$$

В традиционной математике Японии понятие функции выработано не было. Поэтому японские ученые, проводя аналогичные рассуждения для сегмента шара, выражали радиусы сечений по следствию из теоремы о пересекающихся хордах окружности $(2r_k)^2 = 4\left(2r - k\frac{h}{h}\right)\frac{kh}{n}$ (Секи Такакадзу). А для полушара – по теореме Пифагора $r_k = r\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ (Такебе Катахиро). После чего вычисляли площадь сечения, объем слоя и, аналогично показанному выше, объем тела [6].

Все основные тела, рассматриваемые в школьном курсе геометрии, а также клин, архимедово копыто, параболоид вращения отвечают условиям применимости формулы Симпсона [2]. Ясно, что для более сложных тел эта формула недостаточна. Дальнейшее развитие идеи, лежащей в основе вывода формулы Симпсона, стало одним из исходных пунктов при создании математического анализа. Поэтому наиболее общий способ вычисления объемов тел дает интегральное исчисление. Этот способ основан на теореме [9]: если известны площади всех поперечных сечений тела $S(x)$ и $S(x)$ – непрерывная функция на отрезке (a-b), то $V' = S(x)$.

Для ее доказательства рассмотрим сечение $S(x)$ (рисунок 3). Ему соответствует тело объема $V(x)$. Придадим x приращение Δx. тогда приращение объема ΔV=$V(x$+ $\Delta x)$- $V(x)$. Так как $S(x)$ – непрерывная функция на отрезке (a-b), то на отрезке [x, x+ Δx] найдется точка C, такая что тело с объемом ΔV заменяем равным ему цилиндром с объемом $\Delta V = S(c)\Delta x$.

Тогда $\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{S(c)\Delta x}{\Delta x} = S(c)$. Если $\Delta x \to 0$ то $x + \Delta x \to x, c \to x, S(c) \to S(x)$. Поэтому при $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta V}{\Delta x} \to S(x)$ и $V' = S(x)$.

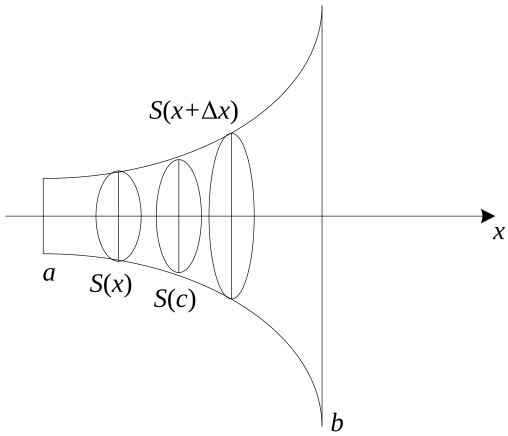

Рисунок 3 – К доказательству теоремы о связи объема и площади сечения

Из доказанного следует, что $V = \int\limits_a^b S(x)\,dx$.

Из полученной формулы следуют.

1) Принцип Кавальери. Видно, что равенство выражений $S(x)$ для двух тел ведет к равенству их объемов.

2) Универсальная формула Симпсона $V = \int\limits_0^h (A + Bx + Cx^2)\,dx = Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{3}$. Далее коэффициенты определяются указанным выше способом.

Следует обратить внимание, на то, что «нестрогие рассуждения», осуществленные при выводе формулы Симпсона, являются упрощением рассуждений строгих, основанных на понятиях предела и производной. Создать математический аппарат для достижения требуемой строгости позволили только труды Огюстена Коши и Карла Вейерштрасса в XIX веке. До того математики прибегали к нестрогим методам, которые единственные могли решить задачу.

Теперь ответ на первый вопрос становится понятным. Методы вычисления объемов разрабатывались долгое время в разных странах. Вначале получены частные результаты. Затем путем обобщения и развития их были созданы общие методы.

Ответ на второй вопрос задумывающегося школьника может быть таким.

Решение задач методом Кавальери научает работе с геометрическими фигурами и телами; необходимость подбора тел сравнения развивает интуицию, изобретательность, смекалку. Эти качества, по мнению автора, дороже заученных доказательств теорем.

При изучении объемов тел на современном уровне, да простят меня учителя и авторы учебников, наилучшим является с помощью методов математического анализа получить универсальную формулу, а из нее вывести все частные случаи [2]. Так школьнику будет ясно, что развитие новой мощной теории позволяет сразу и единообразно получить решение множества частных задач. Понимание этого входит в математическую культуру; усвоение ее, по крайней мере, не менее важно, чем умение заполнять тесты.

Ознакомление с «нестрогим» выводом этой формулы желательно хотя бы для того, чтобы начинающий изучение элементов математического анализа «не устрашился бездны премудрости», чтобы сохранялась некая наглядность материала. Для сознательного усвоения материала важно, чтобы смысл его не исчезал в веренице математических знаков.

В заключение следует сказать, что, как видно из изложенного, рассмотренная тема имеет более глубокое значение, нежели получение расчетных формул. Глубина эта в возможности проследить развитие идей математического анализа, начать его освоение, проникнуться «духом бесконечно малых». Все это будет полезно всегда, независимо от того, насколько много потребуется математика в будущей профессии.

Список литературы

1. Рогановский, Н. М. Геометрия: учебник для средней школы, 10 и 11 классы / Н. М. Рогановский. – Мн. : Нар. асвета, 1998. – 398 с.
2. Понарин, Я. П. Элементарная геометрия в 2х. т. – Т. 2. Стереометрия / Я. П. Понарин. – М. : МЦНМО, 2006. –256 с.
3. Никифоровский, Н. А. Путь к интегралу / Н. А. Никифоровский. – М. : Наука, 1985. – 198 с.
4. Киселев, А. П. Геометрия: планиметрия, стереометрия / А. П. Киселев. – М. : Физматлит, 2004. – 328 с.
5. Аргунов, Б. И. Элементарная геометрия / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. – М. : Просвещение, 1966. – 366 с.
6. Комнатный, Д. В. Достижения традиционной математики Японии / Д. В.Комнатный. – Матэматыка, № 5, 2015. – С. 56 – 63.
7. Депман, И. Я. Рассказы о решении задач / М. Я. Депман. – Л. Детиздат, 1957. – 128 с.
8. Фаермарк, Д. С. Задача пришла с картины / Д. С. Фаермарк. – М. : Наука, 1974. – 159 с.
9. Рогановский, Н. М. Об изложении темы «объемы тел» на факультативных занятиях / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, Д. И. Тавгень. – Матэтатыка: праблемы выкладання. – № 3, 2010. – С. 44– 52.